

# LES COURBES FERMÉES DOUBLES SANS POINTS TRIPLES ASSOCIÉES A UNE FAMILLE CONTINUE

PAR  
T. ZAMFIRESCO

## ABSTRACT

This paper concerns continuous families of planar curves as introduced by B. Grünbaum. With each such family a double closed curve is associated, having the property that each of its points lies on at most two curves of the family.

Le travail actuel continue les recherches sur les familles continues de courbes commencées par M. B. Grünbaum dans [1] et développées dans [2]–[5]. Les applications, surtout celles dans la théorie de la convexité, sont évidentes, parce que les familles continues de courbes généralisent la famille des bissectrices de l'aire, celle des bissectrices du périmètre, celle des diamètres essentiels, etc. d'un corps convexe plan. Le caractère topologique de tous les résultats sur les familles continues de courbes montre assez clairement jusqu'à quel point le cadre de la recherche de beaucoup de propriétés des familles mentionnées ci-dessus peut être élargi.

**Définitions et notations.** Toutes les considérations du présent travail seront faites dans un plan topologique.

Un ensemble  $\mathcal{Q}$  d'arcs de Jordan ouverts est appelé *famille continue de courbes* si les suivantes conditions sont remplies:

1° Chaque courbe de  $\mathcal{Q}$  est incluse (exceptant les extrémités) dans la composante bornée  $D$  du complémentaire d'une courbe de Jordan fermée  $C$ , ses extrémités appartenant à  $C$ .

2° Chaque point  $p \in C$  est l'extrémité d'une courbe  $L(p) \in \mathcal{Q}$  et d'une seule.

3° Si  $L(p_1)$  et  $L(p_2)$  sont deux courbes différentes de  $\mathcal{Q}$ , alors  $L(p_1) \cap L(p_2)$  est un seul point.

4° La courbe  $L(p)$  dépend continûment de  $p \in C$ .

Remarquons que d'après les conditions 1°, 2° et 4° on peut déduire que toute paire de courbes de  $\mathcal{Q}$  a l'intersection non-vide, de façon que la condition 3° exige seulement que

$$\text{card}(L(p_1) \cap L(p_2)) < 2.$$

On désigne par  $-p$  l'extrémité de  $L(p)$  différente de  $p$ .

---

Received April 15, 1968.

Soit

$$f: \mathcal{Q} \rightarrow D$$

une fonction continue. Si pour toute courbe  $L(p) \in \mathcal{Q}$ ,  $f(L(p)) \in L(p)$ , alors l'image de  $\mathcal{Q}$  par  $f$  est appelée *courbe fermée double associée à  $\mathcal{Q}$*  [5]. Evidemment, la fonction

$$q: C \rightarrow D$$

définie par

$$q(p) = f(L(p)) \quad (p \in C)$$

est continue et satisfait à l'égalité  $q(p) = q(-p)$ .

On utilise aussi la notation

$$M_n(\mathcal{Q}) = \{x \in D: \text{card} \{L(p) \in \mathcal{Q}: x \in L(p)\} \geq n\}.$$

On a  $M_1(\mathcal{Q}) = D$ . Les points de  $M_1(\mathcal{Q}) - M_2(\mathcal{Q})$  sont appelés *simples*, les points de  $M_2(\mathcal{Q}) - M_3(\mathcal{Q})$  sont appelés *doubles*, et les autres prennent le nom de points *triples*.

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $D$ . Si  $E$  n'est pas l'image homéomorphe d'un sous-ensemble de la droite, alors  $\text{int } E$ ,  $\text{fr } E$ , et  $\bar{E}$  sont conçues dans la topologie du plan. Si  $\delta$  est une droite, si  $F \subset \delta$  et si

$$h: F \rightarrow E$$

est un homéomorphisme, alors

$$\text{int } E = h(\text{int } F); \text{ fr } E = h(\text{fr } F); \bar{E} = h(\bar{F}),$$

où pour  $F$  il s'agit de la topologie usuelle de  $\delta$ .

Fixons depuis maintenant un certain sens sur la courbe  $C$ .

Aux notations déjà mentionnées ajoutons enfin les suivantes notations spéciales:  $p_1 p_2$  pour le sous-arc de  $C$  parcouru lorsqu'on va de  $p_1$  à  $p_2$  dans le sens fixé sur  $C$ , si  $p_1, p_2 \in C$ , ou

pour le sous-arc de  $L(p)$  d'extrémités  $p_1$  et  $p_2$ , si  $\{p_1, p_2\} \not\subset C$ , mais  $p_1, p_2 \in L(p)$ , ou

pour un sous-arc d'extrémités  $p_1$  et  $p_2$  sur une autre courbe, si l'on fait la mention adéquate.

$[p_1, p_2]$  pour le point  $L(p_1) \cap L(p_2)$ , si  $p_1, p_2 \in C$ .

$\Delta(p_1, p_2)$  pour la composante bornée du complémentaire de  $L(p_1) \cup L(p_2) \cup p_1 p_2$ , si  $p_1, p_2 \in C$ . (On a toujours supposé  $p_1 \neq p_2$ .)

$\Delta(p_1, p_2, p_3)$  pour la composante bornée du complémentaire de  $L(p_1) \cup L(p_2) \cup L(p_3)$ , si  $p_1, p_2, p_3 \in C$  et s'il existe une telle composante.

$\Phi_p$  pour la composante bornée du complémentaire de  $L(p) \cup p(-p)$ , si  $p \in C$ .

$\Psi_p$  pour la composante bornée du complémentaire de  $L(p) \cup (-p)p$ , si  $p \in C$ .

Si  $E \subset D$ , alors toute courbe  $L(p) \in \mathcal{L}$  telle que  $E \subset \overline{\Phi}_p$  ou  $E \subset \overline{\Psi}_p$  sera appelée *courbe d'appui* de  $E$ . L'ensemble de toutes ces courbes sera noté par  $\mathfrak{A}_g(E)$ . Nous dirons qu'une courbe  $L(p) \in \mathcal{L}$  *coupe* l'ensemble  $E$  si  $L(p) \notin \mathfrak{A}_g(E)$  et si  $L(p) \cap E \neq \emptyset$ .

Une courbe fermée  $\gamma \subset D$  est appelée  $\mathcal{L}$ -convexe (*fortement*  $\mathcal{L}$ -convexe) si,  $H$  étant la réunion des composantes bornées du complémentaire de  $\gamma$ ,

$$L(p) \cap (H \cup \gamma) \quad (L(p) \cap H)$$

est connexe, pour tout point  $p \in C$ . On peut noter qu'aucune de ces deux notions ne contient l'autre.

**Quelques préparations.** Le but de cet article est d'étudier l'aspect des courbes fermées doubles associées à une famille continue de courbes, ainsi que l'aspect de la famille-même, dans l'hypothèse que par tout point de ces courbes associées passent deux courbes de la famille au maximum.

Dans ce paragraphe nous ne feront pas cette hypothèse et dans ce cadre nous prouverons deux lemmes très utiles dans la suite.

Soient  $\mathcal{L}$  une famille continue de courbes et  $\Gamma$  une courbe fermée double associée à  $\mathcal{L}$ .

**LEMME 1.** *Soit  $p \in C$ . Si  $\gamma(p)$  est l'ensemble des points  $m$  de  $L(p)$  tels que  $\Gamma - \{m\}$  ne soit plus connexe, alors*

$$\gamma(p) - \{q(p)\} \subset M_3(\mathcal{L}).$$

*Ce résultat est non-trivial si  $\gamma(p) \not\subset \{q(p)\}$ .*

**Démonstration.** Considérons le point  $m_0 \in \gamma(p) - \{q(p)\}$  et soient  $a$  et  $b$  deux points situés dans des composantes différentes de  $\Gamma - \{m_0\}$ . Si les points  $u, v \in C$  vérifient  $q(u) = a$  et  $q(v) = b$ , alors les arcs  $q(uv)$  et  $q(vu)$  passent par  $m_0$ ; en effet, si par exemple  $m_0 \notin q(uv)$ , alors  $a$  et  $b$  pourraient être joints par l'arc  $q(uv) \subset \Gamma - \{m_0\}$ . Il y a donc deux points  $p_1 \in \text{int } uv$  et  $p_2 \in \text{int } vu$  tels que  $q(p_1) = q(p_2) = m_0$ . Puisque  $\text{int } uv$  et  $\text{int } vu$  sont disjoints et  $m_0 \neq q(p)$ , les points  $p_1, p_2$  et  $p$  sont différents, et alors

$$m_0 \in L(p_1) \cap L(p_2) \cap L(p); \quad m_0 \in M_3(\mathcal{L}).$$

**LEMME 2.** *Si*

$$\bigcap_{p \in C} L(p) = \emptyset,$$

*alors il y a un arc non-dégénéré  $A \subset C$  tel que*

$$L(p) \notin \mathfrak{A}_g(\Gamma)$$

pour tout point  $p \in A$ .

**Démonstration.** Nous allons considérer deux cas:

1.  $\Gamma$  est un sous-arc non-dégénéré d'une courbe  $L(p') \in \mathfrak{L}$ . Dans cette hypothèse, l'ensemble  $\text{int}\Gamma - \{q(p')\}$  est ouvert dans la topologie de  $L(p')$ ; la fonction  $q$  étant continue, l'ensemble

$$A = q^{-1}(\text{int}\Gamma - \{q(p')\})$$

est également ouvert. Si  $p \in A$ , alors  $p \notin \{p', -p'\}$ , d'où  $L(p) \neq L(p')$ , mais  $q(p) \in \text{int}\Gamma$ , donc  $L(p)$  coupe  $\Gamma$ .

2. Il n'y a pas de courbe  $L(p')$  telle que  $\Gamma \subset L(p')$ . Considérons la fonction réelle  $f$  définie sur  $C$  de la manière suivante:

$$f(p) = \max_{x \in \Gamma \cap \Phi_p} d(x, L(p)) - \max_{x \in \Gamma \cap \Psi_p} d(x, L(p)),$$

où  $d$  est la distance euclidienne du plan, pour le moment topologiquement transformé en plan euclidien. Remarquons la continuité de la fonction  $f$  et aussi que  $f(-p) = -f(p)$ . D'après la propriété de Darboux, il y a un point  $p_0 \in C$  tel que  $f(p_0) = 0$ .

Supposons, par l'absurde, que  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  est dense dans  $\mathfrak{L}$ . Alors, puisque  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  est évidemment fermé, on a  $\mathfrak{A}_g(\Gamma) = \mathfrak{L}$ . Dans ce cas, pour tout point  $p \in C$ , soit  $\Gamma \cap \Phi_p = \emptyset$ , soit  $\Gamma \cap \Psi_p = \emptyset$ , de façon que

$$\max_{x \in \Gamma \cap \Phi_p} d(x, L(p)) \cdot \max_{x \in \Gamma \cap \Psi_p} d(x, L(p)) = 0.$$

En tenant compte que  $f(p_0) = 0$ , on a alors

$$\max_{x \in \Gamma \cap \Phi_{p_0}} d(x, L(p_0)) = \max_{x \in \Gamma \cap \Psi_{p_0}} d(x, L(p_0)) = 0,$$

d'où il s'ensuit que

$$\Gamma \cap \Phi_{p_0} = \Gamma \cap \Psi_{p_0} = \emptyset,$$

c.-à-d. que  $\Gamma \subset L(p_0)$ , ce qui contredit l'hypothèse du numéro 2.

**L'ensemble  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  et le sous-arc de tangence.** Nous allons supposer toujours dorénavant que  $\Gamma$  n'a pas de points triples, c.-à-d. que

$$\Gamma \cap M_3(\mathfrak{L}) = \emptyset.$$

Dans ce paragraphe le résultat central est le théorème 1 décrivant l'aspect de l'ensemble  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$ .

THÉORÈME 1. *L'ensemble  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  est un continu.*

**Démonstration.** Prouvons à cet effet que si  $L(p_1)$  et  $L(p_2)$  appartiennent à  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$ , alors il y a un arc de  $C$  joignant  $p_1$  avec  $p_2$  ou  $-p_2$  tel que toute courbe de  $\mathfrak{L}$  ayant une extrémité dans cet arc soit courbe d'appui.

La courbe  $\Gamma$  se trouve entièrement dans la fermeture  $F$  d'un des quatre domaines bornés déterminés par  $L(p_1)$ ,  $L(p_2)$  et  $C$ . Supposons, par exemple, que  $p_2 \in \overline{\Phi}_{p_1}$  et  $F = \overline{\Phi}_{p_1} \cap \overline{\Phi}_{p_2}$ . Nous allons prouver que pour tout point  $p \in p_1p_2$ ,  $L(p)$  est une courbe d'appui de  $\Gamma$ ; plus précisément, que  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_p$ .

Il faut observer que pour tout point  $p \in \text{int } p_1p_2$ ,

$$L(p) \cap \text{int } F \neq \emptyset;$$

en effet, si  $L(p) \cap F = \emptyset$ , alors  $q(p) \notin F$ , ce qui n'est pas possible, et si  $L(p)$  passe par  $z = [p_1, p_2]$ , alors  $q(p) = z \in M_3(\mathfrak{L})$ , également impossible.

Supposons, par l'absurde, que  $p_0 \in p_1p_2$ , mais

$$\Gamma \cap \Psi_{p_0} \neq \emptyset. \quad (\text{Fig. 1})$$

Considérons alors les arcs de Jordan

$$\alpha = \overline{\Psi}_{p_0} \cap F \cap L(p_1),$$

$$\beta = \overline{\Psi}_{p_0} \cap F \cap L(p_2)$$

et le point

$$x \in \Gamma \cap \Psi_{p_0}.$$

On peut maintenant distinguer entre deux situations possibles:

$$1^\circ \quad \Psi_{p_0} \cap \text{int } F \cap \Gamma = \emptyset.$$

Dans ce cas,  $x \in \alpha \cup \beta$ ; disons, par exemple, que  $x \in \alpha$ . On a

$$\alpha \cup \beta \subset \Gamma.$$

En effet, si  $(\alpha \cup \beta) - \Gamma \neq \emptyset$ , alors soit  $(\beta \cup xz) - \Gamma \neq \emptyset$ , soit  $(\alpha - xz) - \Gamma \neq \emptyset$ . Puisqu'il existe un chemin sur  $\Gamma$  joignant  $x$  et  $q(p_0)$ , soit  $\alpha - \text{int } xz \subset \Gamma$ , soit  $\beta \cup xz \subset \Gamma$ ; par conséquent, soit

$$\alpha - xz \subset \gamma(p_1),$$

soit

$$\text{int } \beta \subset \gamma(p_2),$$

où  $\gamma(p_1)$  et  $\gamma(p_2)$  ont la signification du lemme 1. Donc, soit  $\gamma(p_1) \neq \emptyset$  (parce que  $x \neq [p_0, p_1]$ ), soit  $\gamma(p_2) \neq \emptyset$ , d'où en vertu du lemme 1,

$$\Gamma \cap M_3(\mathfrak{L}) \neq \emptyset,$$

contredisant notre hypothèse.

Soit  $p_3 \in \text{int}(C \cap F)$ . Si  $z \in L(p_3)$ , alors  $z \in M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est absurde. Si  $z \in \text{int } p_1[p_1, p_3]$ , alors

$$\alpha \cap \Delta(p_0, p_2, p_3) \neq \emptyset;$$

puisque  $\Delta(p_0, p_2, p_3) \subset M_3(\mathcal{Q})$ , suivant le lemme 2 de [1],

$$\alpha \cap M_3(\mathcal{Q}) \neq \emptyset,$$

ce qui est aussi absurde. Si  $z \in \text{int } [p_1, p_3](-p_1)$ , alors on trouve de la même façon que

$$\beta \cap M_3(\mathcal{Q}) \neq \emptyset.$$

$$2^\circ \quad \Psi_{p_0} \cap \text{int } F \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Selon le lemme 2 de [1],

$$\Psi_{p_0} \cap \text{int } F \subset M_3(\mathcal{Q});$$

dans notre cas, on déduit d'ici que

$$\Gamma \cap M_3(\mathcal{Q}) \neq \emptyset,$$

contredisant l'hypothèse.

L'ensemble  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  étant donc connexe et évidemment fermé, est un continu.

LEMME 3. Pour toute paire de courbes  $L(p_1), L(p_2) \in \mathfrak{A}_g(\Gamma)$ ,

$$\Gamma \cap L(p_1) \cap L(p_2) = \emptyset.$$

**Démonstration.** Nous avons prouvé à l'occasion de la démonstration du théorème 1 que si, par exemple,  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_{p_1} \cap \overline{\Phi}_{p_2}$ , alors pour tout point  $p_0 \in \text{int } p_1 p_2$ , on a  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_{p_0}$ ; mais  $[p_1, p_2] \notin \overline{\Phi}_{p_0}$ , d'où  $[p_1, p_2] \notin \Gamma$ .

THÉORÈME 2. L'ensemble

$$\phi = \{q(p): L(p) \in \mathfrak{A}_g(\Gamma)\}$$

est un arc de Jordan ouvert.

**Démonstration.** En effet, suivant le théorème 1,  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  est connexe, mais d'après le lemme 2 (qui est applicable car  $\Gamma \cap M_3(\mathcal{Q}) = \emptyset$  implique  $\cap_{p \in C} L(p) = \emptyset$ ),  $\mathfrak{A}_g(\Gamma) \neq \mathcal{Q}$ ; soit alors  $B$  un sous-arc de  $C$  tel que

$$\{L(p): p \in B\} = \mathfrak{A}_g(\Gamma).$$

Si  $q(p) = q(p')$ , avec  $p, p' \in B$  et  $p \neq p'$ , alors

$$L(p) \cap L(p') \cap \phi \neq \emptyset,$$

ce qui contredit le lemme 3; la fonction  $q$  étant donc bijective et, par définition, continue, est homéomorphe.

L'arc de Jordan  $\phi$  sera appelé *le sous-arc de tangence* de  $\Gamma$ .

**Etude sur les courbes d'appui, préparant le théorème 4.** Nous allons prouver ici deux lemmes, le second contenant le premier, mais en l'utilisant. Ils n'ont pas une importance en eux-mêmes, parce que la situation sera complètement décrite dans le théorème 4. Mais ils sont indispensables pour la démonstration des théorèmes 3 et 4.

**LEMME 4.** *Si  $L(p_0) \in \mathfrak{A}_2(\Gamma)$ , alors il n'y a aucun sous-arc (non-dégénéré) de  $L(p_0)$  avec une extrémité dans  $q(p_0)$  et inclus dans  $\Gamma$ .*

**Démonstration.** Supposons, par l'absurde, que de tels arcs existent et soit  $ab$  leur réunion; au moins une extrémité de  $ab$  est distincte de  $q(p_0)$ , soit par exemple,  $a \in \text{int } p_0q(p_0)$ .

Supposons que  $\Gamma \subset \bar{\Phi}_{p_0}$ . Soit alors  $p_1 \in q^{-1}(a) \cap \bar{\Phi}_{p_0}$ . Considérons les ensembles

$$\alpha = \{x \in aq(p_0) : q^{-1}(x) \cap p_0p_1 \neq \emptyset\},$$

$$\beta = \{x \in aq(p_0) : q^{-1}(x) \cap p_1(-p_0) \neq \emptyset\}.$$

Evidemment,  $\alpha \cup \beta = aq(p_0)$  et  $\alpha \cap \beta \supset \{a, q(p_0)\}$ . Supposons qu'il y a un point

$$y \in \bar{\alpha} \cap \bar{\beta} - \{a, q(p_0)\}.$$

Puisque  $q$  est continue, il y a deux points  $p' \in p_0p_1$  et  $p'' \in p_1(-p_0)$ , tels que

$$q(p') = q(p'') = y;$$

$p', p'' \notin \{p_0, p_1\}$  parce que  $y \notin \{a, q(p_0)\}$ . Alors  $y \in \Gamma \cap M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est impossible. Donc

$$\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = \{a, q(p_0)\},$$

d'où soit

$$1^\circ \quad \alpha = aq(p_0) \text{ et } \beta = \{a, q(p_0)\},$$

soit

$$2^\circ \quad \alpha = \{a, q(p_0)\} \text{ et } \beta = aq(p_0).$$

Cas 1° Puisque

$$\Gamma \cap L(p_0) \cap L(p_1) \neq \emptyset,$$

on a  $L(p_1) \notin \mathfrak{A}_2(\Gamma)$ , en vertu du lemme 3. Comme  $q(p_0) \in \Phi_{p_1}$ , il résulte qu'il existe aussi un point

$$b \in \Gamma \cap \Psi_{p_1}. \tag{Fig. 2}$$

Mais  $q(p_0p_1) = aq(p_0)$ , donc il y a un point

$$p_2 \in q^{-1}(b) \cap \text{int } p_1(-p_0).$$

Evidemment,  $[p_0, p_2] \in \text{int } p_0 a$ . Si  $p_3 \in \text{int } p_0 p_1$ , alors  $q(p_3) \in \text{int } aq(p_0)$ . Rappelons que  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_{p_0}$ ; en outre,

$$\Gamma \cap \Delta(p_0, p_2, p_3) = \emptyset;$$

aussi,

$$\Gamma \not\subset a[p_0, p_2]$$

en vertu de la définition de l'arc  $ab$ . Donc

$$\text{int } a[p_0, p_3] \subset M_3(\mathcal{Q}),$$

selon le lemme 1, ce qui est absurde.

*Cas 2°* En tenant compte que l'arc  $\gamma = q(p_0 p_1)$  joint  $a$  et  $q(p_0)$ , et que  $\gamma \subset \overline{\Phi}_{p_0}$ , il s'ensuit qu'il existe un point

$$c \in \gamma \cap (\Delta(p_1, -p_0) \cup \text{int } aq(p_0)). \quad (\text{Fig. 3})$$

Si  $p_4 \in q^{-1}(c) \cap p_0 p_1$ , alors

$$\text{int } a[p_0, p_4] \subset \Delta(-p_4, -p_1).$$

En vertu du lemme 1 de [1], si  $d \in \text{int } a[p_0, p_4]$ , alors

$$q^{-1}(d) \cap \text{int } p_4 p_1 \neq \emptyset.$$

Mais  $d \in \beta$ , c.-à-d.

$$q^{-1}(d) \cap p_1(-p_0) \neq \emptyset,$$

d'où  $d \in M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est absurde.

**LEMME 5.** Si  $L(p_0) \in \mathfrak{A}_g(\Gamma)$ , alors  $L(p_0) - \Gamma$  est dense sur  $L(p_0)$ .

**Démonstration.** Supposons, par l'absurde, qu'il y a un arc non-dégénéré

$$ab \subset L(p_0) \cap \Gamma. \quad (\text{Fig. 4})$$

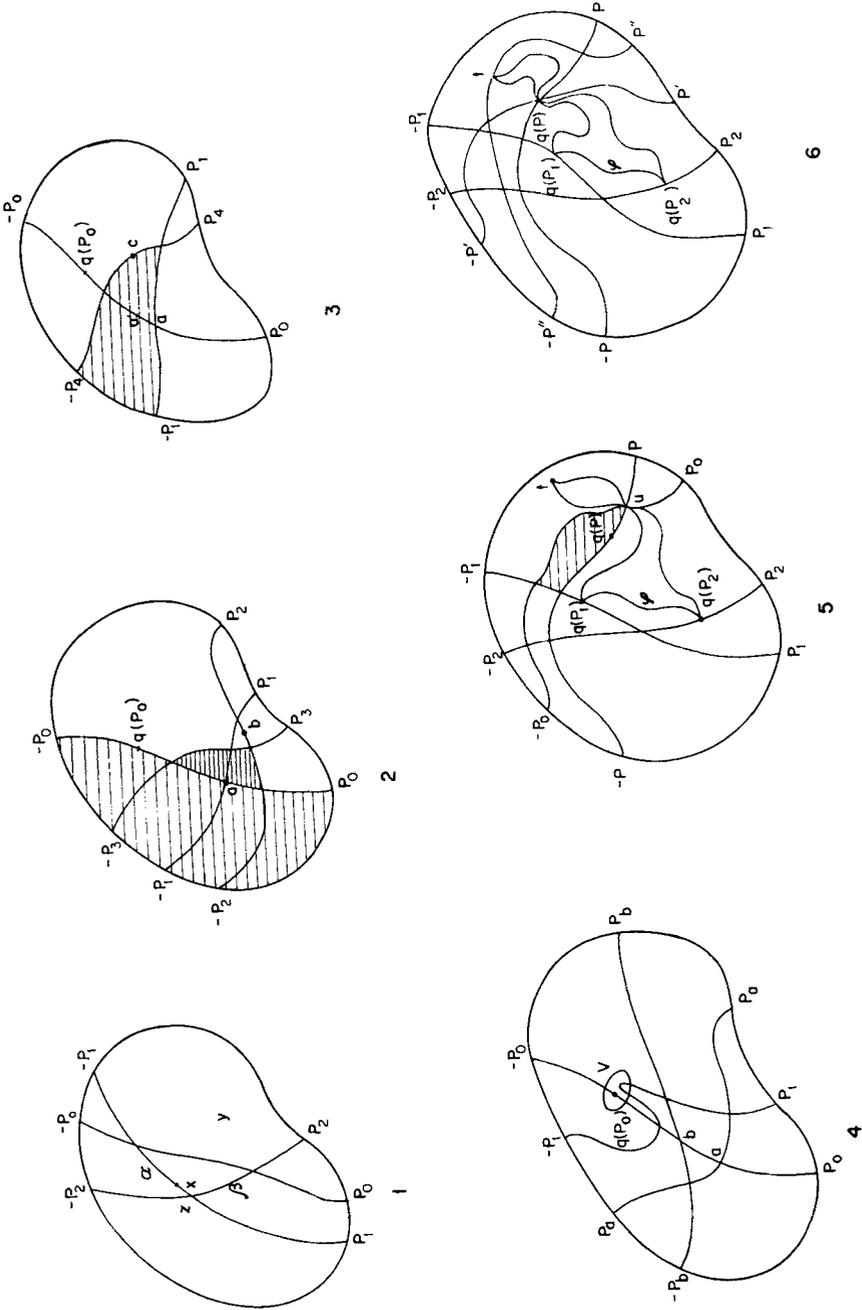
On peut aussi supposer que  $b \in \text{int } aq(p_0)$  et que cet arc  $ab$  est maximal, c.-à-d. par exemple que pour tout point  $x \in \text{int } b(-p_0)$ ,

$$bx \not\subset \Gamma$$

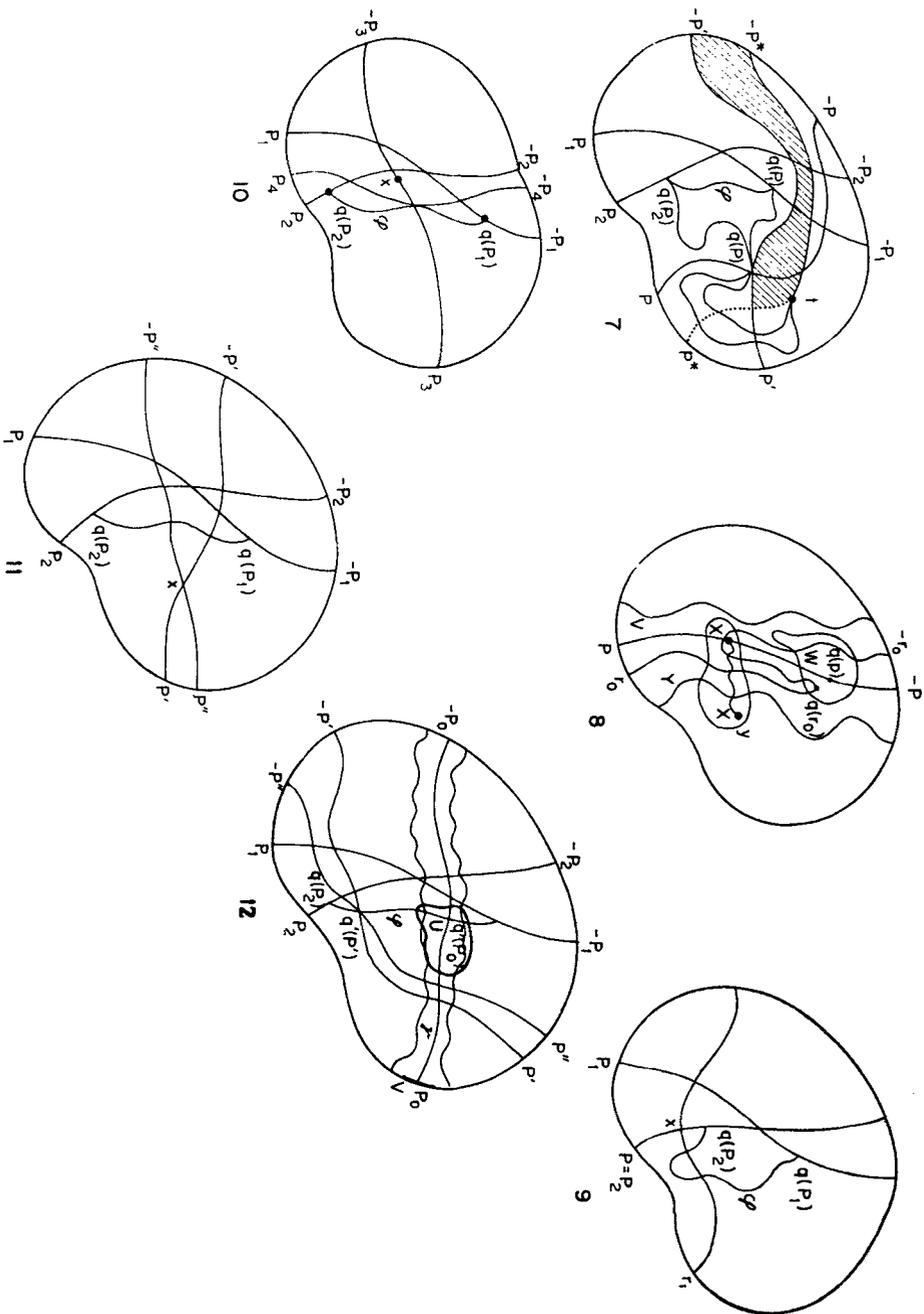
(il n'est pas possible que  $q(p_0) \in ab$ , d'après le lemme 4).

Soient  $\{p_a\} = q^{-1}(a) \cap \overline{\Phi}_{p_0}$  et  $\{p_b\} = q^{-1}(b) \cap \overline{\Phi}_{p_0}$ , et considérons un voisinage  $V$  de  $q(p_0)$  n'intersectant pas  $L(p_a) \cup L(p_b)$ . En vertu de la continuité de l'application  $q$ , il y a un point

$$p_1 \in \text{int } p_0 p_a \cap \text{int } p_0 p_b,$$



Figs. 1—6.



Figs. 7-12.

tel que  $q(p_1) \in V$ . Puisque

$$[p_1, p_b] \in \text{int } bp_b,$$

il est claire que

$$[p_0, p_1] \in \text{int } b(-p_0).$$

Donc  $[p_0, p_1]$  peut jouer le rôle de  $x$  et

$$b[p_0, p_1] \notin \Gamma.$$

En outre,

$$\Delta(p_0, p_1, p_a) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Par conséquent, suivant le lemme 1,

$$\text{int } ab \subset M_3(\Omega),$$

ce qui est absurde.

**Les courbes d'appui du sous-arc de tangence.** Dans ce paragraphe nous allons démontrer que toute courbe de  $\Omega$  qui n'est pas une courbe d'appui pour la courbe fermée double  $\Gamma$  associée à  $\Omega$ , coupe non seulement  $\Gamma$ , mais aussi le sous-arc de tangence  $\phi$  de  $\Gamma$ . En fait, nous prouverons le

THÉORÈME 3.

$$\mathfrak{A}_g(\phi) = \mathfrak{A}_g(\Gamma).$$

**Démonstration.** Evidemment

$$\mathfrak{A}_g(\phi) \supset \mathfrak{A}_g(\Gamma),$$

parce que  $\phi \subset \Gamma$ . Il nous reste donc à prouver l'inclusion contraire.

Soit  $\{L(p_1), L(p_2)\}$  la frontière de  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  et supposons que  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_{p_1} \cap \overline{\Phi}_{p_2}$ . Il faut démontrer que si  $p \in \text{int } p_2(-p_1)$ , alors  $L(p)$  coupe  $\phi$ .

Supposons, par l'absurde, qu'il y a un point

$$p \in \text{int } p_2(-p_1),$$

tel que  $L(p)$  ne coupe pas  $\phi$ .

On sait que  $[p_1, p_2] \neq q(p_i)$  ( $i = 1, 2$ ) et que  $\phi$  est un arc de Jordan ouvert (voir le lemme 3 et le théorème 2). Il résulte d'ici que les relations

$$[p, p_i] \in [p_1, p_2]q(p_i) - \{q(p_i)\} \quad (i = 1, 2)$$

sont impossibles. On peut alors supposer, en gardant la généralité de la démonstration, que

$$[p, p_1] \in (-p_1)q(p_1).$$

Puisque  $L(p) \notin \mathfrak{A}_g(\Gamma)$  et en vertu du lemme 5 appliqué à  $L(p_1)$ , il y a un point  $t \in \Gamma \cap \Delta(p, -p_1)$ . Maintenant, trois situations (non disjointes) peuvent se présenter:

$$1^\circ \quad \Gamma \cap \text{int } pq(p) \neq \emptyset. \quad (\text{Fig. 5})$$

Soit  $u$  le point de  $L(p) \cap \Gamma$  le plus proche de  $p$  sur  $L(p)$ . Soit encore  $p_0 \in p_1(-p_1) - \{-p_1\}$  tel que  $u = q(p_0)$ . Si  $p_0 \in p_1 p_2$ , alors

$$L(p_0) \cap (-p)q(p) \neq \emptyset \text{ et } L(p_0) \cap \text{int } q(p)p \neq \emptyset,$$

d'où

$$\text{card}(L(p_0) \cap L(p)) \geq 2,$$

ce qui est absurde. Donc  $p_0 \in \text{int } p_2(-p_1)$ . Les arcs  $tq(p_1)$  et  $tq(p_2)$  de  $\Gamma$  (qui ne contiennent pas  $\phi$ ) ne traversent pas  $\Delta(p, p_0, p_2)$  (en vertu du lemme 2 de [1]) et ne contiennent pas  $[p_1, p][p_0, p_1]$  (en vertu du lemme 5); donc\*

$$tq(p_1) \cap up \neq \emptyset; \quad tq(p_2) \cup up \neq \emptyset.$$

Alors, en tenant compte du choix de  $u$ ,

$$tq(p_1) \cap up = tq(p_2) \cap up = \{u\}.$$

Soit  $Z = \Delta(-p_0, -p) \cup up$ . On remarque tout de suite que  $Z \cap \Gamma = \{u\}$  et que  $Z$  sépare les points  $t$  et  $q(p_2)$ ; donc l'ensemble  $\Gamma - Z$  n'est pas connexe et, selon le lemme 1,  $u \in M_3(\mathfrak{L})$ , ce qui est absurde.

$$2^\circ \quad L(p) \cap \Gamma = \{q(p)\}.$$

Les arcs  $tq(p_1)$  et  $tq(p_2)$  rencontrent  $L(p)$ , donc ils passent par  $q(p)$ . Par conséquent, il existe encore un (seul) point  $p' \in \text{int } p_2(-p_1)$  tel que  $q(p') = q(p)$ . On peut avoir deux sous-cas:

$$\alpha^\circ \quad p' \in \text{int } p_2 p. \quad (\text{Fig. 6})$$

Dans ce sous-cas, le point  $p'' \in p_1(-p_1)$  tel que  $q(p'') = t$  se trouve entre  $p'$  et  $p$ . Si  $[p, p''] = q(p)$ , alors on aurait  $q(p) \in M_3(\mathfrak{L})$ . Si  $[p, p''] \in \text{int } pq(p)$ , alors

$$\Gamma \cap \Delta(-p'', -p) = \emptyset; \quad \Gamma \cap \text{int } pq(p) = \emptyset,$$

d'où  $t$  serait isolé de  $\phi$ , évidemment absurde. Si  $[p, p''] \in [p, p_1](-p)$ , alors

\* On pourrait tirer les mêmes conclusions simplement de la relation

$$\Gamma \cap \Delta(p, p_0, p_2) = \emptyset$$

si  $p_1 \neq p_2$ ; mais si  $p_1 = p_2$ , l'appui sur le lemme 5 est nécessaire et nous présentons la démonstration dans ce cas général, incluant la possibilité  $p_1 = p_2$ . En fait, il n'est pas possible que  $p_1 = p_2$ , mais nous démontrerons cela en utilisant le présent théorème.

$t \notin L(p'')$ , aussi absurde. Si  $[p, p''] \in \text{int}[p, p_1]q(p)$  (dans le cas où  $[p, p_1] \neq q(p)$ ), alors

$$\text{int}[p, p''] [p_1, p''] \subset \Delta(p, p_1, p') \subset M_3(\mathcal{Q}).$$

Mais  $t \in \text{int}[p, p''] [p_1, p'']$ , d'où  $t \in M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est absurde.

$$\beta^\circ \quad p' \in \text{int } p(-p_1) \quad (\text{Fig. 7}).$$

Puisque  $L(p') \notin \mathfrak{A}_g(\Gamma)$ , il existe un point

$$t' \in \Gamma \cap \Delta(p', -p_1).$$

Soit  $p^* \in \text{int } p_2(-p_1)$  tel que  $q(p^*) = t'$ . Si  $p^* \in \text{int } p_2 p$  ou  $p^* \in \text{int } p'(-p_1)$ , alors il y a un autre point  $p^{**} \in \text{int } p_2 p^*$  ou, respectivement,  $p^{**} \in \text{int } p^*(-p_1)$ , tel que  $q(p^{**}) = q(p)$ , d'où, de nouveau,  $q(p) \in M_3(\mathcal{Q})$ . Donc

$$p^* \in \text{int } pp'.$$

La courbe  $L(p^*)$  se trouve dans la situation 1° déjà étudiée. En effet, si  $[p, p^*] \in \text{int } pq(p)$ , alors

$$L(p^*) \cap \Delta(p', -p_1) \subset \Delta(p, p', p_1) \subset M_3(\mathcal{Q});$$

mais  $t' \in L(p^*) \cap \Delta(p', -p_1)$ , donc  $t' \in M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est impossible. Si  $[p, p^*] = q(p)$ , alors  $q(p) \in M_3(\mathcal{Q})$ , également impossible. Selon le lemme 5,

$$\phi \cap \Delta(-p, -p') - \Delta(p, p', p_1) = \emptyset;$$

selon le lemme 2 de [1],

$$\phi \cap \Delta(p, p', p_1) = \emptyset;$$

$p^*[p, p^*]$  est séparé de  $\phi$  par  $\Delta(-p, -p') \cup \Delta(p, p^*)$ . Donc

$$\phi \cap L(p^*) = \emptyset.$$

Aussi,  $\Gamma \cap \Delta(-p', -p^*) = \emptyset$ ; puisque  $\Delta(-p', -p^*) \cup \text{int } t'p^*$  sépare  $t'$  de  $\phi$ , il s'ensuit que

$$\Gamma \cap \text{int } p^*q(p^*) \neq \emptyset.$$

Maintenant, l'absurdité résulte de celle obtenue au numéro 1°.

$$3^\circ \quad \Gamma \cap \text{int } (-p)q(p) \neq \emptyset \quad (\text{si } q(p) \notin L(p_1)).$$

Soit  $v \in \Gamma \cap \text{int } (-p)q(p)$ . Il y a un point  $p'_0 \in \text{int } p_1(-p_1)$  tel que  $v = q(p'_0)$ . Si  $p'_0 \in p_1 p_2 - \{p_1\}$ , alors  $[p_1, p'_0] \in p_1 q(p_1)$ , car  $L(p'_0) \in \mathfrak{A}_g(\Gamma)$ , donc

$$L(p'_0) \cap (\text{int } q(p_1)(-p_1) \cup \text{int } p[p, p_1]) = \emptyset.$$

Si  $v \neq q(p_1)$ , alors

$$v \in \text{int } q(p_1)(-p_1) \cup \text{int } p[p, p_1],$$

d'où  $v \notin L(p'_0)$ , ce qui est absurde. Si  $v = q(p_1)$ , alors

$$\Gamma \cap L(p_1) \cap L(p'_0) \neq \emptyset,$$

ce qui contredit le lemme 3. Donc  $p'_0 \in \text{int } p_2(-p_1)$ .

Prouvons que  $L(p'_0)$  ne coupe pas  $\phi$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un point  $t'' \in \phi \cap \Phi_{p'_0}$ . Alors il y a un point  $p''_0 \in p_1 p_2$  tel que  $q(p''_0) = t''$ . On a

$$L(p''_0) \cap \text{int}(-p_1)q(p_1) \neq \emptyset,$$

ce qui contredit l'appartenance de  $L(p''_0)$  à  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$ .

En ajoutant ici que

$$\Gamma \cap v p'_0 \neq \emptyset,$$

il résulte que  $L(p'_0)$  se trouve dans l'une des situations 1° ou 2°, déjà réduites à l'absurde.

COROLLAIRE.

$$\text{card } \mathfrak{A}_g(\Gamma) = \aleph.$$

En effet,  $\text{card } \mathfrak{A}_g(\Gamma) \in \{1, \aleph\}$  car  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  est connexe, et si  $\Gamma$  avait une seule courbe d'appui  $L(p_1)$ , alors selon le théorème 3 toute courbe  $L(p) \in \mathfrak{L} - \{L(p_1)\}$  couperait  $\phi = \{q(p_1)\}$ , ce qui est absurde.

**La distribution des points du sous-arc de tangence sur les courbes de la famille.** Le principal résultat de cette section est le théorème 4 énonçant que l'intersection du sous-arc  $\phi$  de  $\Gamma$  avec chaque courbe  $L(p) \in \mathfrak{L}$  est formée d'un seul point.

LEMME 6. *Supposons que  $\{L(p_1), L(p_2)\}$  forme la frontière de  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$  et que*

$$\Gamma \subset \bar{\Phi}_{p_1} \cap \bar{\Phi}_{p_2}.$$

Alors

$$\text{card}(L(p) \cap \phi) = 1$$

quel que soit  $p \in \text{int } p_2(-p_1)$ .

**Démonstration.** En vertu du théorème 3,

$$L(p) \cap \phi \neq \emptyset.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il y a trois points distincts

$$p' \in p_1 p_2; \quad p'' \in p' p_2; \quad p \in \text{int } p_2(-p_1)$$

tels que  $L(p)$  passe par  $q(p')$  et  $q(p'')$ . Puisque  $q(p'') \in \overline{\Phi}_{p'}$ , mais  $q(p'') \neq [p', p'']$ , il résulte que  $L(p) \cap \text{int}[p', p'']p'' \neq \emptyset$ , d'où

$$L(p) \cap \text{int}[p', p'']p' \neq \emptyset.$$

Mais, de l'autre côté,  $q(p') \in \text{int}[p', p''](-p')$ , d'où

$$\text{card}(L(p) \cap L(p')) \geq 2,$$

ce qui est absurde.

LEMME 7. Si  $L(p) \in \mathfrak{A}_q(\Gamma)$ , alors

$$L(p) \cap \Gamma = \{q(p)\}.$$

**Démonstration.** Plaçons-nous dans les hypothèses du lemme 6. Nous savons maintenant que  $p_1 \neq p_2$  (selon le Corollaire du théorème 3). Supposons, raisonnant par l'absurde, que  $p \in p_1 p_2$  et

$$x \in L(p) \cap \Gamma - \{q(p)\}.$$

Disons, par exemple, que  $x \in \text{int} p q(p)$ . On peut avoir deux situations:

$$1^\circ \quad p \neq p_2.$$

Soient  $V$  et  $X$  deux voisinages disjoints inclus dans  $D$ , le premier du point  $q(p)$  et le second du point  $x$  (Fig. 8). Soit  $\gamma$  un sous-arc non-dégénéré de  $\Gamma$  complètement contenu dans  $X$  et ayant  $x$  comme une extrémité. En vertu du lemme 5, il y a un point

$$y \in \gamma - L(p).$$

Considérons ensuite un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $L(p)$  dans  $\Omega$ , tel que

$$y \notin Y = \bigcup_{L(a) \in \mathcal{V}} L(a),$$

et un voisinage connexe  $W \subset V$  de  $q(p)$  tel que  $W \subset Y - px$ . Puisque  $\gamma \subset X$  et  $V \cap X = \emptyset$  il résulte que  $W \cap \gamma = \emptyset$ . D'autre part,  $W$  est connexe,  $W \subset Y$  et

$$W \cap (\gamma \cup px) = \emptyset,$$

d'où

$$W \cap Z = \emptyset,$$

où  $Z$  est la composante de  $(Y \cap \overline{\Phi}_p) - \gamma$  qui contient  $p$ .

En vertu de la continuité de la fonction  $q$ , il existe un voisinage  $W_0$  de  $p$  sur  $C$  tel que  $q(r) \in W$  quel que soit  $r \in W_0$ . Soit  $r_0 \in W_0 \cap \text{int} p p_2$ ; on a alors  $r_0 q(r_0) \in \overline{\Phi}_p$ , donc

$$r_0 q(r_0) \in Y \cap \overline{\Phi}_p.$$

Puisque  $r_0 \in Z$ , mais  $q(r_0)$  appartient à une autre composante de  $(Y \cap \overline{\Phi}_p) - \gamma$  (parce que  $q(r_0) \in W$  et  $W \cap (Z \cup \gamma) = \emptyset$ ), il s'ensuit que  $L(r_0)$  coupe  $\gamma$ , d'où

$$\Psi_{r_0} \cap \gamma \neq \emptyset,$$

ce qui est absurde.

$$2^\circ \quad p = p_2. \quad (\text{Fig. 9})$$

Soit  $r_1 \in p_1(-p_1)$  tel que  $x = q(r_1)$ . En vertu du lemme 3,  $r_1 \notin \text{int } p_1 p_2$ . Evidemment,  $r_1 \notin \{p_1, p_2\}$ , donc  $r_1 \in \text{int } p_2(-p_1)$ . Selon le théorème 3,

$$\phi \cap \Psi_{r_1} \neq \emptyset.$$

Puisque le sous-arc de tangence  $\phi$  est un arc de Jordan ouvert (voir le théorème 2), avec les extrémités dans  $\Phi_{r_1}$ , il résulte que

$$\text{card}(L(r_1) \cap \phi) \geq 2,$$

ce qui contredit le lemme 6.

**THÉORÈME 4.** *Pour toute courbe  $L(p) \in \Omega$ , on a*

$$\text{card}(L(p) \cap \phi) = 1.$$

**Démonstration.** En effet, si  $p \in \text{int } p_2(-p_1)$ , l'égalité ci-dessus fait l'objet du lemme 6 et si  $p \in p_1 p_2$ , alors

$$\{q(p)\} \subset L(p) \cap \phi \subset L(p) \cap \Gamma = \{q(p)\},$$

où la dernière égalité constitue le lemme 7.

**Le sous-arc sécant.** Les premiers deux lemmes de ce paragraphe ont un certain intérêt indépendant du résultat central, le théorème 5, qui va les utiliser. Le second, par exemple, donne des indications sur le placement des points doubles dans  $D$ . Du théorème 5 il résulte que toute courbe fermée double  $\Gamma$  associée à une famille continue, est la réunion de deux arcs de Jordan aux mêmes extrémités, l'un étant le sous-arc de tangence et l'autre un arc qui sera appelé le sous-arc sécant de  $\Gamma$ .

**LEMME 8.** *Soit  $\{L(p_1), L(p_2)\}$  la frontière de  $\mathfrak{A}_g(\Gamma)$ ; supposons que  $\Gamma \subset \overline{\Phi}_{p_1} \cap \overline{\Phi}_{p_2}$  et soit  $G$  la composante bornée du complémentaire de  $\phi \cup q(p_2)p_2 \cup p_2(-p_1) \cup (-p_1)q(p_1)$ . On a*

$$\Gamma \subset G \cup \phi.$$

**Démonstration.** Selon le lemme 7,

$$\Gamma \cap (L(p_1) \cup L(p_2)) = \{q(p_1), q(p_2)\},$$

donc il nous reste à établir que

$$\Gamma \cap G' = \emptyset,$$

où  $G'$  est la composante bornée du complémentaire de  $L(p_1) \cup L(p_2) \cup \phi$ .

Si  $x \in G'$ , alors il y a un point  $p_3 \in \text{int } p_2(-p_1)$  tel que  $x \in L(p_3)$ , en vertu du lemme 1 de [1]. Puisque  $x \in \Phi_{p_1} \cap \Phi_{p_2}$ , nous avons

$$x(-p_3) \cap L(p_1) \neq \emptyset; \quad x(-p_3) \cap L(p_2) \neq \emptyset. \quad (\text{Fig. 10})$$

Par conséquent,

$$\text{int } xp_3 \cap L(p_1) = \emptyset; \quad \text{int } xp_3 \cap L(p_2) = \emptyset.$$

Mais  $\text{int } xp_3 \cap \text{fr } G' \neq \emptyset$ , d'où

$$\text{int } xp_3 \cap \phi \neq \emptyset.$$

Si  $p_4$  est un point de  $p_1p_2$  tel que  $q(p_4) \in \text{int } xp_3$ , alors

$$x \in \Psi_{p_4},$$

donc  $x \notin \Gamma$  et la démonstration est finie.

LEMME 9. Dans les hypothèses du lemme 8,

$$M_2(\mathcal{Q}) \cap \tilde{G} - \text{int } \phi = \emptyset.$$

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point

$$x \in M_2(\mathcal{Q}) \cap \tilde{G} - \text{int } \phi.$$

Evidemment,  $x \notin p_2(-p_1)$ . Si  $x \in p_2q(p_2)$ , alors soit  $L(p_3) \in \mathcal{Q} - \{L(p_2)\}$  telle que  $x \in L(p_3)$ . Si  $p_3 \in p_1p_2$ , alors soit  $q(p_2) \in \Psi_{p_3}$  (absurde), soit  $q(p_2) \in L(p_3)$  (contredisant le lemme 3); si  $p_3 \in \text{int } p_2(-p_1)$ , alors on contredit soit le théorème 3, soit le lemme 6 (voir la démonstration du lemme 7, cas 2°). La situation  $x \in (-p_1)q(p_1)$  est similaire. Si  $x \in G$ , alors il y a deux points  $p', p'' \in \text{int } p_2(-p_1)$  tels que  $x = [p', p'']$ . (Fig. 11.) Puisque

$$\phi \subset \Phi_{p_1} \cup \Phi_{p_2} \cup \{q(p_1), q(p_2)\},$$

il s'ensuit que soit

$$\phi \cap \Delta(p_1, p', p'') \neq \emptyset,$$

soit

$$\phi \cap \Delta(-p', -p'') = \emptyset.$$

Dans le premier cas,  $\phi \cap M_3(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$ , ce qui est absurde; dans le deuxième,  $x \notin G$ , également absurde.

THÉORÈME 5. *L'ensemble*

$$\psi = \overline{\{q(p) : L(p) \notin \mathfrak{A}_g(\Gamma)\}}$$

est un arc de Jordan ouvert.

**Démonstration.** Avec les hypothèses du lemme 6, on a, en vertu de la continuité de  $q$ ,  $\psi = q(p_2(-p_1))$ . Supposons qu'il existerait une paire de points distincts  $r', r'' \in p_2(-p_1)$  tels que  $q(r') = q(r'')$ . En vertu du lemme 9,  $q(r') \notin \bar{G} - \text{int } \phi$ ; suivant le lemme 8,  $q(r') \in G \cup \phi$ . Donc

$$q(r') \in G \cup \phi - (\bar{G} - \text{int } \phi) = \text{int } \phi.$$

Il résulte d'ici que

$$\{r', r''\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$$

et que  $q(r')$  appartiendrait aussi à une courbe d'appui de  $\Gamma$ , d'où  $q(r') \in \phi \cap M_3(\mathfrak{L})$ , ce qui est absurde.

L'arc de Jordan  $\psi$  est appelé *le sous-arc sécant* de  $\Gamma$ .

**La distribution des points d'une courbe fermée double associée à une famille continue sur les courbes de la famille.** On prouvera ici, par le théorème 6, que sur toute courbe d'une famille continue  $\mathfrak{L}$  se trouvent soit un, soit deux points d'une courbe fermée double associée  $\Gamma$ ; à savoir, sur toute courbe d'appui il y a un (seul) point de  $\Gamma$ , et celui-ci appartient au sous-arc de tangence, et sur toute autre courbe de  $\mathfrak{L}$  il y a un point du sous-arc de tangence et un point du sous-arc sécant, mais ces deux points ne sont pas nécessairement distincts.

**LEMME 10.** *Reprenons les hypothèses du lemme 6. Selon le corollaire du lemme 7,  $\phi \cap L(p)$  est un seul point  $q'(p)$  pour chaque point  $p \in C$ . Suivant le théorème 2, la restriction  $q' \upharpoonright p_1 p_2$  est homéomorphe. D'une façon analogue, la restriction  $q' \upharpoonright p_2(-p_1)$  est homéomorphe.*

**Démonstration.** Soient  $p_0 \in p_2(-p_1)$  et  $U$  un ouvert contenant  $q'(p_0)$  (Fig. 12). En tenant compte du théorème 4,

$$L(p_0) \cap \phi - U = \emptyset.$$

Puisque  $\phi - U$  est fermé, il y a un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $L(p_0)$  tel que  $L(p) \cap \phi - U = \emptyset$  pour toute  $L(p) \in \mathcal{V}$ . Soit  $V$  un voisinage de  $p_0$  tel que  $L(p) \in \mathcal{V}$  quel que soit  $p \in V$ . Alors, pour ces points  $p$ ,

$$L(p) \cap \phi \subset U;$$

par conséquent  $q'$  est continue.

Supposons maintenant qu'il existe une paire de points distincts  $\{p', p''\} \subset p_2(-p_1)$  tels que  $q'(p') = q'(p'')$ . Evidemment,

$$\{p', p''\} \neq \{p_1, p_2\}.$$

Si

$$\{p', p''\} \cap \{p_1, p_2\} \neq \emptyset,$$

alors  $\{q(p_1), q(p_2)\} \cap M_2(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$ , ce qui contredit le lemme 9. Enfin, si

$$\{p', p''\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset,$$

alors  $q'(p') \in \phi \cap M_3(\mathcal{Q})$ , ce qui est absurde.

Par conséquent,  $q' \mid p_2(-p_1)$  est continue (comme restriction de  $q'$  dont la continuité a été prouvée) et bijective, donc homéomorphe.

**THÉORÈME 6.** Si  $p \in C$ , alors

$$1 \leq \text{card}(L(p) \cap \Gamma) \leq 2,$$

plus précisément,

$$L(p) \cap \Gamma = \{q(p)\} \cup \{q'(p)\},$$

la fonction  $q'$  étant définie au lemme 10.

**Démonstration.** Faisons les hypothèses du lemme 8. Puisque

$$L(p) \cap \phi = \{q'(p)\},$$

il nous reste à prouver que

$$L(p) \cap \Gamma \subset \phi \cup \{q(p)\}.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point

$$a \in L(p) \cap \Gamma - (\phi \cup \{q(p)\}).$$

En vertu du lemme 8,  $a \in \Gamma - \phi$  implique  $a \in G$ . Aussi,  $a \in \Gamma$  implique l'existence d'un point  $p_0 \in C$  tel que  $a = q(p_0)$ . Puisque  $a \neq q(p)$ , les points  $p$  et  $p_0$  sont distincts. Alors, on a simultanément,

$$a = [p, q_0] \in M_2(\mathcal{Q}); a \in G,$$

ce qui contredit le lemme 9.

Donc, si  $q(p) = q'(p)$  (c.-à-d. si  $q(p) \in \phi$ ), alors

$$\text{card}(L(p) \cap \Gamma) = 1$$

et si  $q(p) \neq q'(p)$  (c.-à-d. si  $q(p) \notin \phi$ ), alors

$$\text{card}(L(p) \cap \Gamma) = 2.$$

**Propriétés de convexité et la distribution des points simples et doubles sur une courbe fermée double associée.** Cette dernière section établit l' $\mathcal{Q}$ -convexité et l' $\mathcal{Q}$ -convexité forte des courbes fermées doubles associées et, aussi, que tout point du sous-arc de tangence de  $\Gamma$ , exceptant les extrémités, est un point double et que tous les autres points de  $\Gamma$  sont simples.

**THÉORÈME 7.** *La courbe  $\Gamma$  est  $\mathcal{Q}$ -convexe et fortement  $\mathcal{Q}$ -convexe.*

**Démonstration.** Soit  $H$  la réunion des composantes bornées du complémentaire de  $\Gamma$ . Rappelons que  $\Gamma = \phi \cup \psi$  et que  $\psi \subset G \cup \phi$ , en vertu du lemme 8. Il résulte que

$$H = F \cap G,$$

où  $F$  est la composante bornée du complémentaire de  $L(p_1) \cup L(p_2) \cup \psi$ .

Soit  $p \in C$ . Selon le théorème 6,

$$\text{card}(L(p) \cap \Gamma) \in \{1, 2\}.$$

Si  $\text{card}(L(p) \cap \Gamma) = 1$ , alors

$$L(p) \cap H = \emptyset; \quad L(p) \cap (H \cup \Gamma) = \{q(p)\}.$$

Si  $\text{card}(L(p) \cap \Gamma) = 2$ , alors, selon le lemme 7,  $L(p) \notin \mathcal{A}_g(\Gamma)$ , donc

$$L(p) \cap G = \text{int } pq'(p); \quad L(p) \cap F = \text{int } [p, p_1]q(p) \cap \text{int } [p, p_2]q(p),$$

d'où

$$L(p) \cap H = \text{int } q(p)q'(p).$$

D'une manière similaire on obtient

$$L(p) \cap (H \cup \Gamma) = q(p)q'(p).$$

Par conséquent,  $L(p) \cap (H \cup \Gamma)$  et  $L(p) \cap H$  sont toujours connexes, ce qui prouve les assertions du théorème.

**THÉORÈME 8.**

$$\text{int } \phi \subset M_2(\mathcal{Q}) - M_3(\mathcal{Q}); \quad \Gamma - \text{int } \phi \subset M_1(\mathcal{Q}) - M_2(\mathcal{Q}).$$

**Démonstration.** Puisque

$$\text{int } \phi \subset \Phi_{p_1} \cap \phi_{p_2}$$

(on a repris les hypothèses du lemme 6), pour tout point  $x \in \text{int } \phi$ , il y a une courbe  $L(p_x) \notin \mathcal{A}_g(\Gamma)$  passant par  $x$ , en vertu du lemme 1 de [1]. Comme il y a aussi une courbe d'appui qui passe par  $x$ , il résulte que  $x \in M_2(\mathcal{Q})$ . Par hypothèse  $\Gamma \cap M_3(\mathcal{Q}) = \emptyset$ , donc

$$\text{int } \phi \subset M_2(\mathcal{Q}) - M_3(\mathcal{Q}).$$

En s'appuyant sur les lemmes 8 et 9, on obtient

$$\Gamma \subset G \cup \phi \subset \bar{G};$$

$$M_2(\mathcal{Q}) \cap \Gamma - \text{int } \phi \subset M_2(\mathcal{Q}) \cap \bar{G} - \text{int } \phi = \emptyset,$$

ce qui conclut la démonstration.

**COROLLAIRES.** *Il n'est pas possible que  $\Gamma \cap M_2(\mathcal{Q}) = \emptyset$  ou au moins que  $\Gamma - M_2(\mathcal{Q})$  soit dense sur  $\Gamma$ .*

Selon le corollaire du théorème 3,  $\text{card } \mathfrak{A}_p(\Gamma) = \aleph$ , d'où le sous-arc de tangence est non-dégénéré, donc  $\text{int } \phi \neq \emptyset$ ; en vertu du théorème 8,

$$\text{int } \phi \subset \Gamma \cap M_2(\mathcal{Q}).$$

*Si l'ensemble  $\Gamma \cap M_2(\mathcal{Q})$  est dense sur  $\Gamma$ , alors  $\phi = \psi$ , donc  $\Gamma$  est un arc de Jordan ouvert; dans ce cas,*

$$\Gamma - \{q(p_1), q(p_2)\} \subset M_2(\mathcal{Q}); \quad q(p_i) \in M_1(\mathcal{Q}) - M_2(\mathcal{Q}) \quad (i = 1, 2).$$

*Il s'ensuit qu'il est également impossible que  $\Gamma \subset M_2(\mathcal{Q})$ ; plus précisément, on a  $\text{card}(\Gamma - M_2(\mathcal{Q})) \in \{2, \aleph\}$ .*

En effet, si  $\Gamma \cap M_2(\mathcal{Q})$  est dense sur  $\Gamma$ , alors  $q(p) = q'(p)$  sur une partie dense de  $C$ , d'où  $q = q'$  et donc  $\phi = \psi$ . Les autres assertions résultent immédiatement du théorème 8.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. B. Grünbaum, *Continuous families of curves*, Canad. J. Math. **18** (1966), 529-537.
2. T. Zamfiresco, *On planar continuous families of curves*, Canad. J. Math. (à paraître).
3. T. Zamfiresco, *Sur les familles continues de courbes* (Note I). Rend. Lincei, **42**, 6, (1967) 771-774.
4. T. Zamfiresco, *Sur les familles continues de courbes* (Note II). Rend. Lincei, **43**, 1-2, (1967) 13-17.
5. T. Zamfiresco, *Sur les familles continues de courbes* (Note III). Rend. Lincei, **44,5**, (1968). 639-642.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES,  
 BUCAREST  
 ET  
 INSTITUT DE MATHÉMATIQUES,  
 BOCHUM